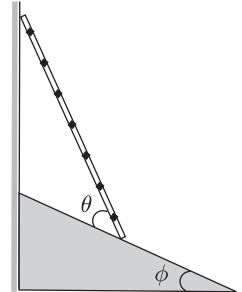


ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 1 (2 μονάδες)

Σκάλα μήκους L και μάζας M ισορροπεί ακουμπώντας το ένα άκρο σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ και το άλλο σε κάθετο τοίχο όπως στο σχήμα. Η δύναμη της τριβής μπορεί να αγνοηθεί μεταξύ της σκάλας και του κάθετου τοίχου αλλά όχι μεταξύ της σκάλας και του κεκλιμένου επιπέδου. Η σταθερά της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι g . Αν η γωνία μεταξύ της σκάλας και του κεκλιμένου επιπέδου είναι θ (βλ. Σχήμα)



(i) Να σχεδιαστούν και να υπολογιστούν όλες οι δυνάμεις που ενεργούν στη σκάλα καθώς και η ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής μεταξύ της σκάλας και του κεκλιμένου επιπέδου.

(ii) Αν $\phi = 30^\circ$ να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της γωνίας θ για την οποία μπορεί να ισορροπήσει η σκάλα.

ΘΕΜΑ 2 (2 μονάδες)

Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κάθετα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0 μέσα σε ρευστό του οποίου η αντίσταση στην κίνηση του σώματος έχει μέτρο αv^2 όπου α γνωστή σταθερά. Η σταθερά της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι g .

(i) Να υπολογιστεί το ύψος στο οποίο θα φτάσει το σώμα.

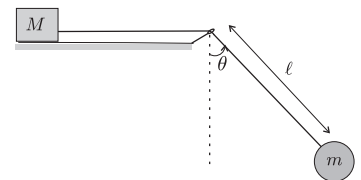
(ii) Ναδειχθεί ότι η ταχύτητα v_f την οποία θα έχει το σώμα όταν επιστρέψει στο σημείο από το οποίο εκτοξεύτηκε ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{1}{v_f^2} = \frac{1}{v_0^2} + \frac{\alpha}{mg}$$

(ii) Ποια η μεταβολή στην ενέργεια του σώματος και σε τι οφείλεται αυτή η μεταβολή ;

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες)

Εκκρεμές αποτελούμενο από αβαρές σχοινί μήκους ℓ και μάζα m δένεται σε σώμα μάζας $M = 2m$ το οποίο βρίσκεται σε τραπέζι όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος μάζας M και του τραπεζιού είναι $\mu = 0.634$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g . Το εκκρεμές απομακρύνεται κατά γωνία θ_0 από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται να κινηθεί



(i) Θεωρώντας ότι το σώμα στο τραπέζι είναι ακίνητο να υπολογιστεί η τάση του σχοινού συναρτήσει των γωνιών θ και θ_0 .

(ii) Ποια είναι η μέγιστη γωνία από την οποία μπορεί να αφηθεί να κινηθεί το εκκρεμές χωρίς να προκαλέσει μετατόπιση του σώματος στο τραπέζι ;

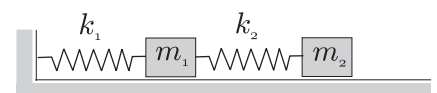
ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες)

Σώμα μάζας m ενέργειας E βρίσκεται σε κεντρικό δυναμικό της μορφής $V(r) = \frac{a}{r^2} + b$ όπου a, b γνωστές σταθερές. Σε χρόνο $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $r(0) = r_0, \theta(0) = 0$

(i) Δίνεται επιπλέον ότι σε χρόνο $t = 0$ το τετράγωνο της στροφορμής του σώματος ισούται με $-2am$. Να προσδιοριστεί η εξίσωση τροχιάς του σώματος $r(\theta)$, και να σχεδιαστεί η τροχιά του (διερευνήστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις). (ii) Για $a > 0$ να υπολογιστεί η χρονική εξέλιξη της θέσης του σωματιδίου καθώς και του μέτρου της ταχύτητάς του.

ΘΕΜΑ 5 (2 μονάδες)

Το σύστημα του σχήματος αποτελείται από δύο ελατήρια σταθερών $k_1 = k, k_2 = 3k$ και δύο μάζες $m_1 = 4m, m_2 = 5m$ και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο τραπέζι. Να ευρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης.



ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \quad (\text{A1})$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A2})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A3})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{A4})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{A5})$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A6})$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (\text{A7})$$

Ολοκληρώματα

$$\int dx \frac{1}{x^2 + 1} = \arctan x \quad (\text{A8})$$

$$\int dx \frac{1}{x^2 - 1} = \operatorname{arctanh} x \quad (\text{A9})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + bx + c}} = \ln\left(b + 2y + 2\sqrt{y^2 + by + c}\right) \quad (\text{A10})$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots \quad (\text{A11})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots \quad (\text{A12})$$

Πλάγια βολή

$$y = x \tan \theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{A13})$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (\text{A14})$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta \quad (\text{A15})$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \quad (\text{A16})$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m r^2 \dot{\theta} = L \quad (\text{A17})$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) = E \quad (\text{A18})$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια.

Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\text{A19})$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m \alpha} \quad (\text{A20})$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \quad (\text{A21})$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0 / (1 - \epsilon^2) \quad (\text{A22})$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (\text{A23})$$

Μικρές Ταλαντώσεις

Στην περιοχή του ελάχιστου x_0 του δυναμικού $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \quad (\text{A24})$$