

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2006

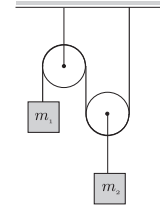
ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες $A=1.5$ $B=1$)

A. Η μηχανή του Atwood του σχήματος αποτελείται από δύο μάζες m_1 και m_2 συνδεδεμένες με ελαφρύ μη εκτατό σχοινί. Οι μάζες των τροχαλιών είναι αμελητέες και η σταθερά της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι g .

(i) Να σχεδιαστούν και να υπολογιστούν όλες οι δυνάμεις που ενεργούν σε κάθε μάζα και να υπολογιστεί η τάση του σχοινού καθώς και η επιτάχυνση της κάθε μάζας.

(ii) Να εξεταστεί και να σχολιαστεί η οριακή περίπτωση $m_1 = m_2$.

B. Αν ένα σώμα ισορροπεί κάτω από την επίδραση τριών συνεπίπεδων δυνάμεων ναδειχθεί ότι διεθύνσεις τους περνούν από το ίδιο σημείο. Διερευνείστε τυχόν ειδικές περιπτώσεις στις οποίες δεν ισχύει η απόδειξη.

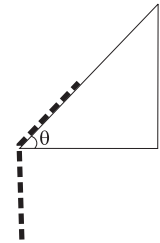


ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες)

Ομογενής αλυσίδα μάζας m και μήκους L τοποθετείται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\theta = 30^\circ$ έτσι ώστε η μισή αλυσίδα να βρίσκεται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. (βλ Σχήμα). Ο συντελεστής τριβής μεταξύ της αλυσίδας και του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και η σταθερά της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι g . Η αλυσίδα αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί.

(i) Βρείτε την ταχύτητά της αλυσίδας όταν εγκαταλείπει το κεκλιμένο επίπεδο.

(ii) Προσδιορίστε το χρόνο που θα χρειαστεί η αλυσίδα για να εγκαταλείψει το κεκλιμένο επίπεδο.

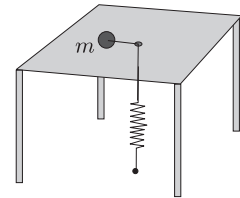


ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες)

Σώμα μάζας m βρίσκεται σε μεγάλο οριζόντιο τραπέζι και συνδέεται με αβαρές νήμα, το οποίο περνάει από οπή στο κέντρο του τραπεζιού, με ελατήριο σταθεράς k το οποίο έχει το άλλο άκρο του στερεωμένο στο δάπεδο όπως στο σχήμα. Όταν η μάζα m βρίσκεται στο κέντρο του τραπεζιού το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος.

(i) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης που διέπει τη μετατόπιση της μάζας m από το κέντρο του τραπεζιού.

(ii) Αν αρχικά το σώμα έχει στροφορμή L , να υπολογιστεί το ενεργό δυναμικό, να εξεταστεί κάτω από ποιες συνθήκες μπορεί να εκτελεί κυκλική τροχιά και να προσδιοριστεί η ακτίνα αυτής της τροχιάς.



ΘΕΜΑ 4 (2.5 μονάδες $A=1.5$ $B=1$)

A. Κομήτης εκτελεί ελλειπτική τροχιά εκκεντρότητας e γύρω από τον Ήλιο. Να βρεθεί υπολογιστεί ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη ταχύτητα του κομήτη.

B. Σώμα κινείται υπό την επίδραση κεντρικού δυναμικού. Ναδειχθεί ότι η κίνησή του λαμβάνει χώρα σε ένα επίπεδο.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \quad (\text{A1})$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A2})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A3})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{A4})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{A5})$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A6})$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (\text{A7})$$

Ολοκληρώματα

$$\int dx \frac{1}{x^2 + 1} = \arctan x \quad (\text{A8})$$

$$\int dx \frac{1}{x^2 - 1} = \operatorname{arctanh} x \quad (\text{A9})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + bx + c}} = \ln \left(b + 2x + 2\sqrt{x^2 + bx + c} \right) \quad (\text{A10})$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots \quad (\text{A11})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots \quad (\text{A12})$$

Πλάγια βολή

$$y = x \tan \theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{A13})$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (\text{A14})$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta \quad (\text{A15})$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = F_r \quad (\text{A16})$$

$$m (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) = F_\theta$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m r^2 \dot{\theta} = L \quad (\text{A17})$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) = E \quad (\text{A18})$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια.

Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\text{A19})$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m \alpha} \quad (\text{A20})$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2 E L^2}{m \alpha^2}} \quad (\text{A21})$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0 / (1 - \epsilon^2) \quad (\text{A22})$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{G M} a^3 \quad (\text{A23})$$

Μικρές Ταλαντώσεις

Στην περιοχή του ελάχιστου x_0 του δυναμικού $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \quad (\text{A24})$$